Lección 3: Oscilaciones

Resumen

El oscilador armónico es un modelo importante en la física. Sólo dos parámetros, la frecuencia natural y la amortiguación, lo describen por completo. Muchos sistemas más complejos se comportan aproximadamente como osciladores armónicos con pequeñas desviaciones. Un oscilador armónico ideal, en el que la fuerza de restablecimiento aumenta linealmente con la desviación para desviaciones arbitrariamente grandes, no existe en la naturaleza. Sin embargo, el concepto tiene una importancia fundamental, ya que muchos sistemas se aproximan muy bien a él, especialmente cuando sólo se consideran pequeñas desviaciones respecto al estado de reposo.

Tabla de contenidos

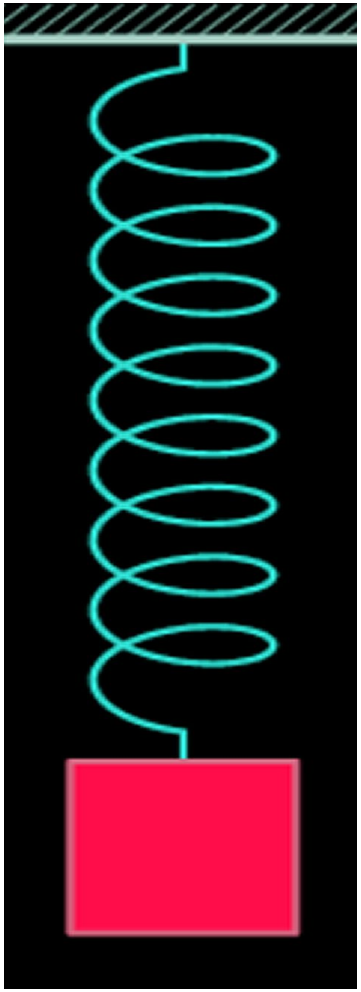
El péndulo mecánico (1)

Un ejemplo mecánico de un sistema capaz de oscilar es una masa m suspendida de un muelle que cuelga verticalmente hacia abajo en el campo de gravitación. Cuando se aplica una carga adicional y se suelta la masa, ésta oscila en dirección vertical. La fuerza restauradora del muelle actúa sobre la masa m, donde k es la constante del muelle e y es la desviación vertical desde la posición de reposo. La constante del muelle caracteriza la fuerza necesaria para extender el muelle en una longitud determinada.

La ecuación del movimiento se obtiene a partir de la tercera ley de Newton.

$$F = m \cdot a = m \cdot \ddot{y} = -k \cdot y$$

$$\ddot{y} - \frac{k}{m} y = 0$$



El péndulo mecánico (2)

Sustituyendo el coeficiente por la frecuencia angular: $\omega = 2\pi \cdot \nu = \frac{2\pi}{T}$

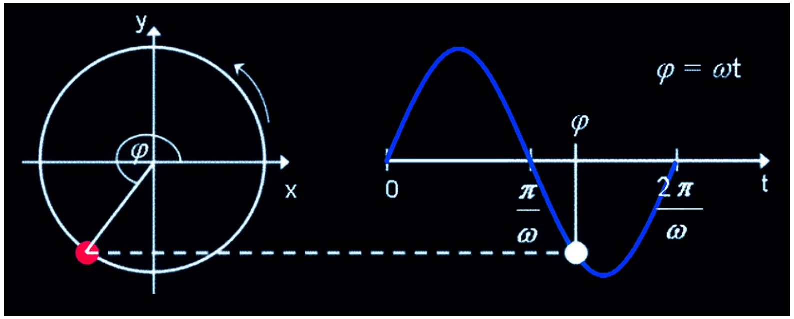
$$\ddot{y} + \omega^2 \cdot y = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Las funciones cuyas segundas derivadas son idénticas con el signo contrario son la función seno o coseno.

$$y = y_{max} \cdot \sin(\omega t) = A \cdot \sin(\omega t)$$

A: amplitud = y_{max}
ωt: fase en el eje temporal (t), que puede ser desplazada por una fase inicial φ.



Energía de la oscilación

En el caso de la oscilación mecánica, la energía cinética E_{cin} se convierte periódicamente en energía potencial.

Energía cinética: $E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2$

La velocidad de la masa se deduce de la primera derivada:

$$\dot{y} = v = y_{max} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

$$E_{cin} = \frac{1}{2}m \cdot y_{max}^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}k \cdot y_{max}^2 \cdot \cos^2(\omega t)$$

Energía potencial: $Fuerza\ multiplicada\ por\ la\ distancia = \int_0^{y(t)} F \cdot dy$

$$E_{pot} = \int_0^{y(t)} k \cdot y \cdot dy = \frac{1}{2}k \cdot y^2(t) = \frac{1}{2}k \cdot y_{max}^2 \cdot \sin^2(\omega t)$$

$$Energía_{total} = E_{cin} + E_{pot}$$

$$E_{total} = \frac{1}{2}k \cdot y_{max}^2 \cdot \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}k \cdot y_{max}^2 \cdot \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}k \cdot y_{max}^2$$

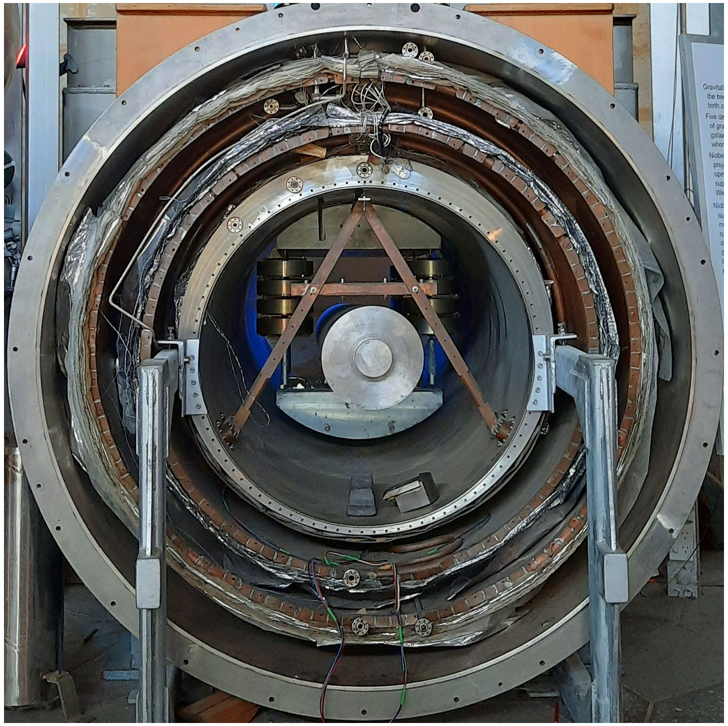
Ondas gravitacionales (1)

Las ondas gravitacionales son ondas generadas por masas aceleradas. Dado que la energía radiada es extremadamente baja, sólo existe la posibilidad de medirla en el caso de masas muy grandes con fuertes aceleraciones. Por lo tanto, sólo hay una chance de su descubrimiento en la astronomía. Por ejemplo, los sistemas estelares binarios en rotación pueden generar ondas gravitacionales continuas, o eventos aislados como una fusión de estrellas o explosiones estelares pueden emitir ondas gravitacionales durante un corto periodo de tiempo. Desde un punto de vista teórico, las ondas gravitacionales del primer tipo se encuentran en un rango de frecuencias muy bajo, $\nu_{gravitacional,sistema\ orbital\ binario} \leq 10^{-3} Hz$, y las del segundo tipo en el rango de $\nu_{gravitacional,fusión\ de\ estrellas} > 10^{3} Hz$. Un dispositivo sencillo para detectar el movimiento de las ondas es el detector de resonancia. Un gran cilindro de metal macizo, aislado contra los choques externos, empieza a vibrar como una campana (o un diapasón) cuando la frecuencia de excitación coincide con su frecuencia natural. Este tipo de instrumento fue el primer modelo de detector de ondas gravitacionales construido y probado por Joseph Weber.

Ondas gravitacionales (2)

Su dispositivo estaba hecho de aluminio de $2m$ de largo y $1m$ de diámetro. Sin embargo, no pudo detectar las ondas gravitacionales. El desarrollo posterior condujo a cilindros metálicos refrigerados a la temperatura del helio líquido, cuyas vibraciones podían captarse sin contacto. La mejor realización mecánica posible se consiguió con un detector fabricado de niobio, un metal extremadamente duro, para lograr la máxima sensibilidad con un pico de resonancia muy agudo y casi sin amortiguación. En términos numéricos, el tiempo de decaimiento de las oscilaciones del cilindro de niobio es de varios días y la energía sonora mínima detectable es de

$$Energía_{sonora} = 10^{-26}\, J$$

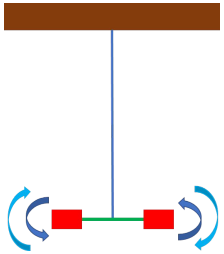


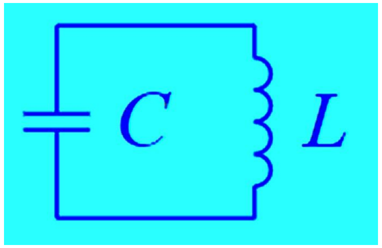
Ondas gravitacionales (3)

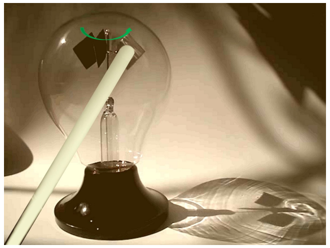
Esto corresponde a la energía que posee la carga más pequeña, es decir, un electrón, en un potencial eléctrico de 6 microvoltios.
A pesar de toda la perfección, no se ha logrado detectar las ondas gravitacionales. En la actualidad, un detector más sensible utiliza la interferometría láser para medir el movimiento inducido por las ondas gravitacionales entre masas (cilindro de vidrio pulido plano suspendido en posición flotante) separadas. Esto permite que las masas estén separadas por grandes distancias – unos kilómetros – que aumenta la precisión de la medición. Una otra ventaja es que es sensible a un amplio rango de frecuencias, no sólo a las cercanas a una resonancia, como en el caso de los cilindros metálicos. A pesar de las grandes dimensiones de los interferómetros, las ondas gravitacionales más potentes modifican la distancia entre los extremos de los brazos solamente por ${}^{1}/_{1000}$ del radio de un protón. Con dichos interferómetros se logró por primera vez la detección de ondas gravitacionales bajo el supuesto de eventos cósmicos especiales. Otros datos futuros con tecnología de medición mucho más avanzada mostrarán si tales interpretaciones son correctas.

Oscilaciones en general

Las oscilaciones se producen cuando hay un intercambio periódico de 2 formas diferentes de energía, es decir, la conversión de energía de un almacén de energía a un otro almacén de energía (suponiendo poca amortiguación como la fricción o la absorción). Además de las oscilaciones mecánicas de diversas formas de péndulos, se producen oscilaciones acústicas en los instrumentos musicales, oscilaciones eléctricas en los circuitos electrónicos y en la óptica, la luz se conoce como una oscilación electromagnética.







En el circuito eléctrico resonante, la energía eléctrica (de un dispositivo de almacenamiento capacitivo: condensador C) se convierte periódicamente en energía magnética (de un dispositivo de almacenamiento de corriente: bobina L).

Energía de las oscilaciones en el circuito eléctrico resonante

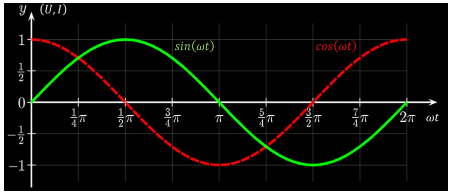
Se puede determinar una ecuación diferencial análoga a la de la oscilación mecánica para la corriente eléctrica I.

$$\ddot{I} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad ; \quad \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

Almacenamiento de energía eléctrica: $E_{el} = \frac{1}{2} C U^2$

Almacenamiento de energía magnética: $E_{mag} = \frac{1}{2} L I^2$

Oscilación armónica del voltaje y de la corriente eléctrica:



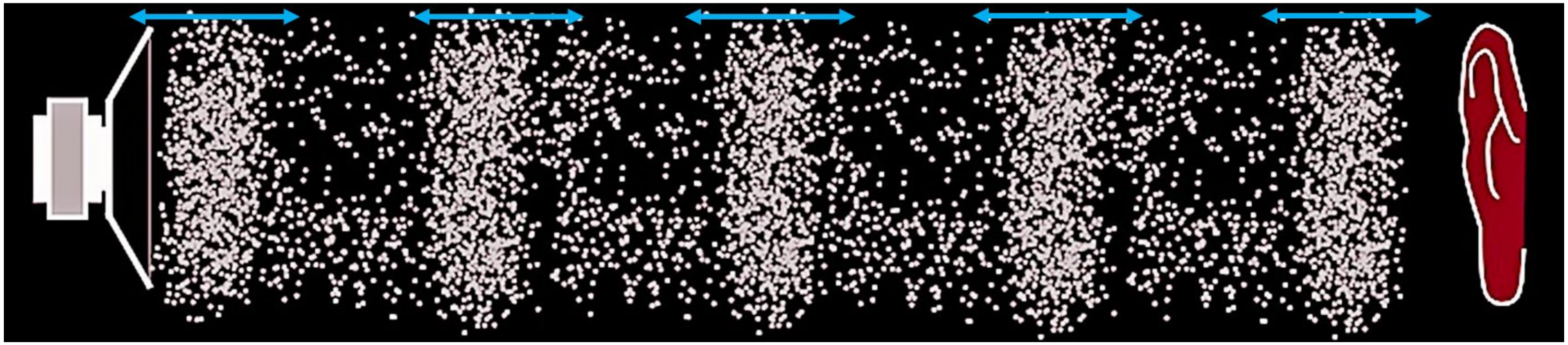
$$E_{el} = \frac{1}{2} C U_{max}^2 \cdot \sin^2(\omega t) \quad ; \quad E_{mag} = \frac{1}{2} L I_{max}^2 \cdot \cos^2(\omega t) \quad ; \quad \frac{1}{2} C U_{max}^2 = \frac{1}{2} L I_{max}^2$$

Energía total del circuito resonante:

$$E_{total} = \frac{1}{2} C U_{max}^2 \cdot \sin^2(\omega t) + \frac{1}{2} L I_{max}^2 \cdot \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} C U_{max}^2$$

Energía de la oscilación acústica (1)

La energía acústica es la energía transmitida por las ondas acústicas en un medio. Se transfiere a las partículas del medio en forma de energía cinética (movimiento de las partículas) y energía potencial (cambios de la presión generados en el medio). Cuando el sonido se propaga a través del medio, la energía se transmite a la velocidad de la onda, pero las partículas de aire (o las moléculas del medio de transmisión del sonido) oscilan alrededor de su posición de reposo a una velocidad diferente; esta velocidad instantánea (v) de una partícula oscilante caracteriza la energía acústica.



La velocidad instantánea no es idéntica a la velocidad del sonido.

Energía de la oscilación acústica (2)

Como la propagación del sonido está ligada a un medio, se utiliza la densidad de energía, es decir, la energía por volumen, en lugar de la energía. La densidad de energía acústica se aplica en un lugar específico del campo acústico. Utilizando la densidad del medio (ρ), se expresa la energía por volumen. Por analogía con las oscilaciones mecánicas y eléctricas sigue:

$$\frac{E_{total}}{Volumen} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{max,partícula}^2$$

La intensidad acústica I es la energía acústica por tiempo que atraviesa un área A. Esta intensidad también puede describirse mediante la presión acústica p y la velocidad instantánea $v_{instantánea}$ de las partículas del medio. Solucionado según p, la presión de radiación acústica resulta de la intensidad del sonido.

$$I_{acústica} = p_{acústica} \cdot v_{instantánea} \quad ; \quad p_{acústica} = \frac{I}{v}$$

Energía de la radiación (1)

El campo eléctrico y el campo magnético siempre aparecen juntos y su dirección y fase están en una relación fija entre sí.

La periodicidad local y temporal de las ondas en propagación satisface una ecuación diferencial (=ecuación de onda):

$$y = A \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

$$\omega t\text{: } fase\ temporal \quad ; \quad \omega = 2\pi \cdot \nu \quad ; \quad \nu\text{: } frecuencia$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} x\text{: } fase\ local \ ; \ c = \nu \cdot \lambda \ ; \ c\text{: } velocidad\ de\ propagación$$

Segunda derivada según el tiempo t y la dimensión x:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right) \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right) \qquad \text{(II)}$$

Energía de la radiación (2)

Insertar la ecuación (I) en la (II):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\nu^2 \cdot \lambda^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Ecuación de onda en una dimensión

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Una ecuación análoga puede derivarse para las ondas electromagnéticas a partir de las ecuaciones de Maxwell. Para la ecuación de onda del campo eléctrico de la onda electromagnética sigue:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

La misma ecuación de onda se aplica al campo magnético.

Energía de la radiación (3)

Al comparar la ecuación de onda en su forma matemática generalmente válida, resulta que la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas es la velocidad de la luz, c. Esto demostró que la naturaleza de la luz tiene que ser una onda electromagnética.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

El acoplamiento del campo eléctrico con el campo magnético también sigue de las ecuaciones de Maxwell.

$$\frac{E_0}{B_0} = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

La onda electromagnética transporta energía en el campo eléctrico y magnético. Se determina la densidad de energía en ambos campos.

$$\frac{Energía_{el}}{Volumen} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 \quad ; \quad \frac{Energía_{magn}}{Volumen} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot B^2$$

Energía de la radiación (4)

La densidad energética total es la suma de ambos componentes.

$$\frac{Energía_{total}}{Volumen} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot B^2 = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot \mu_0 \cdot \varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0 E^2$$

Para la densidad de energía promedio y el valor máximo del campo vale

$$\frac{Energía_{total,promedio}}{Volumen} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0^2$$

Otras definiciones relacionadas:

La energía promedio se obtiene multiplicando la densidad de energía por el elemento del volumen que atraviesa la luz en el tiempo Δt por un área A.

$$Energía_{onda\ electromagnética} = A \cdot\ c \cdot \Delta t \cdot \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0^2$$

Energía de la radiación (5)

La intensidad I es la energía que pasa por el tiempo Δt y área A.

$$I = \frac{A \cdot\ c \cdot \Delta t \cdot \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0^2}{A \cdot \Delta t} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0^2 \quad ; \quad unidad\text{:}\ \left[\frac{W}{m^2} = \frac{J}{m^2 \cdot s} = \frac{N}{m \cdot s}\right]$$

La intensidad instantánea también puede describirse como un vector en la dirección de propagación de la onda electromagnética (luz):

$$I_{instantánea} = c \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 \rightarrow \varepsilon_0 \cdot c^2 \cdot \vec{E} \times \vec{B} = vector\ de\ Poynting$$

El vector de Poynting también se llama flujo de energía $\vec{S}$, que equivale al momento por volumen almacenado en los campos.
Este momento puede transmitir una fuerza. La fuerza por área se llama la presión de radiación, $\left({}^{Intensidad}/_{velocidad\ de\ la\ luz}\right)$.

$$\frac{F}{A} = p_{radiación} = \frac{I}{c} = \varepsilon_0 \cdot E^2$$

Energía de la radiación (6)

Ejemplos numéricos:

La intensidad del sol después de atravesar la atmósfera es aproximadamente 1000 W/m² en la superficie de la tierra. Para el campo eléctrico y magnético esto resulta:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot I}{c \cdot \varepsilon_0}} = 868 \ \frac{V}{m}$$

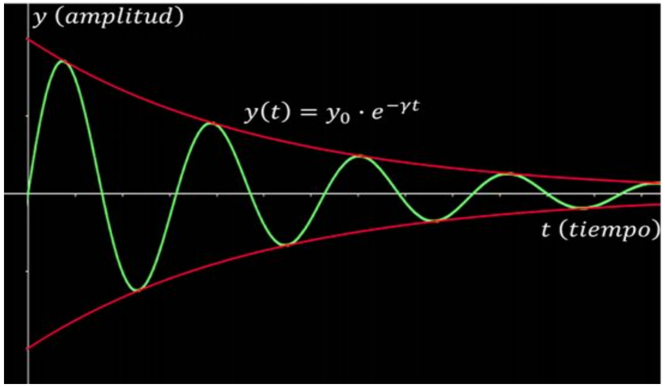
$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 2.9 \cdot 10^{-6} \ \frac{Vs}{m^2} \approx 0.03 \ Gauss$$

Una superficie negra absorbente recibe la presión de radiación:

$$p_{radiación} = \frac{I}{c} = 3.3 \cdot 10^{-6} \ \frac{N}{m^2}$$

Sistemas oscilantes con amortiguación (1)

Los sistemas considerados se comportan de forma lineal, es decir, una fuerza restauradora es proporcional a la dislocación. Una oscilación de este tipo se llama armónica porque siempre es sinusoidal. La amortiguación, que siempre está presente, conduce a una disminución de la amplitud de la oscilación, evitando así una catástrofe de resonancia.
En el caso mecánico, se puede suponer que una fuerza de fricción es proporcional a la velocidad, como indica la ley de Stokes ($F = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot \dot{y}$). Esto modifica la ecuación diferencial:



$$\ddot{y} + 2 \cdot \gamma \cdot \dot{y} + \omega^2 \cdot y = 0$$

γ: constante de decaimiento
La solución de la ecuación diferencial muestra una oscilación armónica con una amplitud que disminuye en caso de un amortiguamiento pequeño. La envolvente es una función exponencial con el factor de amortiguación γ en el exponente. En el tiempo τ la amplitud cae a ${}^{1}/_{e}$. Dos amplitudes sucesivas se distinguen por la relación de amortiguación $e^{-\gamma T}$.

Sistemas oscilantes con amortiguación (2)

En un péndulo de muelle, la mayor parte de la energía de oscilación se convierte en energía térmica cuando el muelle se deforma. La resistencia del aire también contribuye a la fricción. En el caso de las oscilaciones acústicas (propagación del sonido), una parte de la energía se disipa también en forma de energía térmica por las colisiones de las partículas.

¿Qué tipo de amortiguación existe en la radiación de un dipolo, es decir, al acelerar las cargas eléctricas?

La amortiguación de la radiación se origina porque las propias partículas cargadas (electrones) aceleradas emiten radiación electromagnética. Esto crea una retroalimentación al campo externo. Como la contribución en las ecuaciones de movimiento es pequeña, este efecto no es normalmente considerado. En el capítulo siguiente se tratan algunas propiedades especiales de la generación de radiación electromagnética. Una investigación teórica más detallada conduce a problemas fundamentales aún no resueltos.

Similitudes de diferentes sistemas oscilantes

Sistema	Péndulo de muelle	Péndulo de torsión	Circuito electrónico resonante	Oscilación acústica, Sonido	Oscilación electromagnética, Luz
Amplitud	Desplazamiento y	Ángulo φ	Carga eléctrica q	Presión p	Electrón $e = q$
Velocidad	$\dot{y} = v$	$\dot{\varphi} = \omega$	$\dot{q} = I$ (corriente)	$\dot{p}$	$\dot{q} = I$ (corriente)
Masa / Inercia	Masa m	Momento de inercia J	Inductividad L		
Rigidez	Constante de muelle k	Constante de torsión μ	Capacidad recíproca C^{-1}		
Frecuencia de resonancia	$\frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{J}}$	$\frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{LC}}$		
Energía, Energía/Volumen	$\frac{1}{2} \cdot k \cdot y_0^2$	$\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot \varphi_0^2$	$\frac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^2$	$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_0^2$	$\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0^2$
Presión sobre objetos				$\frac{I(intensidad)}{v}$	$\frac{I(intensidad)}{c}$