Lección 2: Indicadores sin dimensión

Resumen

En la física, se busca en vano un efecto de similitud. Se trata más bien de una forma especial de ver las cosas que a veces permite hacer afirmaciones cuantitativas sin conocer una solución exacta. Si en un sistema existen efectos no lineales, las consideraciones de similitud son a menudo la única forma de anticipar la respuesta del sistema. Por eso, las relaciones de similitud se utilizan en aplicaciones técnicas cuando una solución directa al problema parece difícil o imposible.

Tabla de contenidos

Consideraciones sobre la similitud

Con la finalidad de transferir un proceso físico (original) a un proceso modelo, se pueden utilizar relaciones sin dimensión. Los términos sin dimensión pueden ser cocientes de longitudes, velocidades, fuerzas o energías. La ventaja de utilizar las similitudes es que se pueden estimar las tendencias, los valores límite o incluso los valores cuantitativos (si es más grande o más pequeño, más rápido o más lento o también en otras dimensiones) sin necesidad de realizar laboriosos cálculos. Hay que tener en cuenta que, aunque las consideraciones de similitud permiten describir sistemas complejos, no siempre tienen que ser de mayor alcance.

Escenas especiales en las películas de cine (1)

Para una película de acción, hay que grabar una escena en la que un tren descarrila y cae en un barranco. Debido al limitado presupuesto, la escena se pretende recrear con la ayuda de un modelo de ferrocarril de escala 1:100.
Si la escena se realizara simplemente en macro para simular un tamaño real, el tren caería a una velocidad exagerada porque la aceleración de la gravitación no se ajusta al modelo, sino que es constante. Así que la escena tiene que ser tomada adicionalmente a cámara lenta para presentar una impresión más realista.

La ley de la caída en el campo de gravitación de la Tierra proporciona una respuesta a la pregunta de cuánto más lento debe representarse el proceso.

Escenas especiales en las películas de cine (2)

La fórmula física de la caída es:

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

s: distancia de caída
g: aceleración en el campo de gravitación
t: tiempo

La realidad y el modelo se ponen en relación. El índice (o) representa el original, el índice (m) el modelo. De aquí se deduce un cociente sin dimensión.

$$\frac{s_o}{s_m} = \frac{\frac{1}{2} g t_o^2}{\frac{1}{2} g t_m^2} = \frac{t_o^2}{t_m^2} = \frac{100}{1}$$

$$t_m^2 = \frac{t_o^2}{100} \qquad \rightarrow \qquad t_m = \frac{t_o}{10}$$

Escenas especiales en las películas de cine (3)

La escena debe ser filmada en cámara lenta 10 veces para dar una impresión realista de la velocidad de caída del tren. Como las grabaciones de películas se realizan con 24 imágenes por segundo (24 frames per second = 24 fps), la frecuencia debe aumentarse hasta 240 imágenes por segundo.

En este ejemplo, se supone que sólo es importante la velocidad de caída y que se puede despreciar la influencia de la fricción del aire durante la caída. La utilización de relaciones sin dimensión no es un procedimiento que pueda aplicarse según un esquema fijo, sino que requiere una comprensión básica de los procesos y su elaboración física, así como experiencia con las cantidades que se esperan.

A veces pueden surgir dificultades en la selección o definición de indicadores adecuados. Además, a menudo no es posible mantener constantes todos los indicadores sin dimensión. En este caso, la transferencia de resultados es limitada.

Comportamiento del flujo en gases y líquidos

Aunque la turbulencia es omnipresente y puede observarse, es muy difícil estudiarla experimentalmente. Las fórmulas fundamentales son las llamadas ecuaciones de Navier-Stokes. Sólo pueden solucionarse para unos pocos casos, como los fluidos ideales sin fricción. En la mayoría de los casos, ni siquiera se sabe si existe una solución. La turbulencia es un efecto caótico, es decir, su formación depende en gran parte de las condiciones externas. Si estos varían sólo ligeramente, el patrón de flujo puede parecer completamente diferente. Hecho es que este comportamiento del flujo juega un factor crucial en la aviación. Otras áreas son el estudio y la modelización de los procesos de fusión en las estrellas, la variación temporal de los flujos en el manto y el núcleo de la Tierra, y cosas más cotidianas como los flujos atmosféricos (el clima) e incluso el flujo de la sangre en arterias y venas. Debido a la complejidad de este fenómeno, se ayuda de relaciones adecuadas tal como un cociente de fuerzas.

Indicador de Reynolds

En el caso de la turbulencia, el peso de una fuerza significa mantener un flujo laminar, mientras que el peso de la otra fuerza significa el cambio a la turbulencia. Esto es lo que hace el indicador Reynolds, Re.

$$\frac{Fuerza\ inercial}{Fuerza\ viscosa} = \frac{v \cdot \rho \cdot l}{\eta} = Re$$

v: velocidad del flujo

ρ: densidad

l : longitud característica

η: viscosidad

El factor decisivo es que los procesos físicos se desarrollan de forma similar en sistemas de diferentes dimensiones, siempre que el valor numérico del indicador sea idéntico.

Indicador de Froudé

Si la gravitación interviene en los flujos, el número de Froudé, Fr, se utiliza como indicador.

$$\frac{Fuerza\ de\ inercia}{Fuerza\ de\ gravedad} = \frac{v^2}{g \cdot l} = Fr$$

v: velocidad

g: aceleración en el campo de gravitación

l : longitud característica

Manteniendo el número de Froudé, los modelos de barcos se construyen para aprender a manejarlos (una autoescuela para naves, por así decirlo).

Por razones técnicas similares, el número de Reynolds es más importante en el estudio de la evitación de turbulencias, por ejemplo, para los submarinos y la aviación.

Indicador de Euler

Otro indicador para los flujos en los que hay que tener en cuenta una presión negativa que se produce es el número de Euler, Eu:

$$\frac{Fuerza\ de\ presión}{Fuerza\ de\ inercia} = \frac{\Delta p}{\rho \cdot v^2} = Eu$$

Δp: diferencia de presión
ρ : densidad
v: velocidad

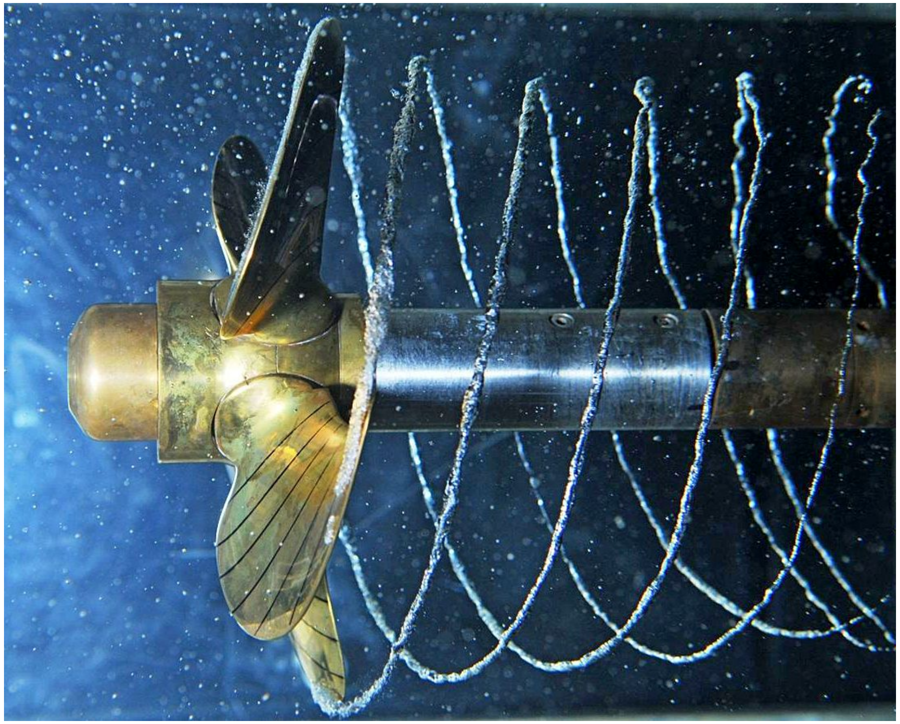
Relacionado es el número de cavitación, σ:

$$\sigma = \frac{p - p_{vapor}}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2}$$

p_{vapor}: presión de vapor del fluido

Indicador de cavitación

Si la presión p desciende tanto que alcanza la presión de vapor, el fluido cambia a la fase gaseosa. Por encima de esta velocidad de flujo, se produce la cavitación, que lleva a la destrucción del material.



Indicador de convección

Al considerar la expansión térmica, el transporte térmico y la conducción térmica, se pueden definir otros indicadores como el número de Grashof, Gr, el número de Prandtl, Pr, y el número de Nusselt, Nu. El número de Grashof y el número de Prandtl tienen su importancia para la convección, el número de Nusselt permite calcular la transferencia de calor entre una pared y los gases o líquidos que pasan. Como ejemplo, se presenta el número de Grashof: es la relación entre la fuerza de flotación de un fluido y la fuerza que actúa sobre él debido a la viscosidad, multiplicada por la relación entre la fuerza de inercia y la fuerza viscosa.

$$\frac{Fuerza\ de\ flotación}{Fuerza\ viscosa} \cdot \frac{Fuerza\ de\ inercia}{Fuerza\ viscosa} = \frac{g \cdot \beta \cdot \left(T_{superficie} - T_{volumen}\right) \cdot L^3}{\eta^2} = Gr$$

g: aceleración por la gravitación
β: coeficiente de expansión térmica del volumen
L: longitud vertical

T_s: temperatura superficial
T_v: temperatura del volumen
η : viscosidad (cinemática)

Otros cocientes sin dimensión

El número de Grashof es una forma de cuantificar las fuerzas opuestas de flotación causadas por la diferencia de temperatura y la viscosidad de un medio. El número es una medida de la convección natural (también llamada convección libre). Para el mismo número de Grashof dos sistemas de convección libre son dinámicamente similares. Para realizar cálculos sencillos de carácter técnico, hay muchos más índices.
Todas las definiciones tienen en común la falta de dimensiones. El control de la constancia del tamaño típico permite cambiar los parámetros con la consecuencia de aumentar o disminuir la escala para aplicaciones prácticas.

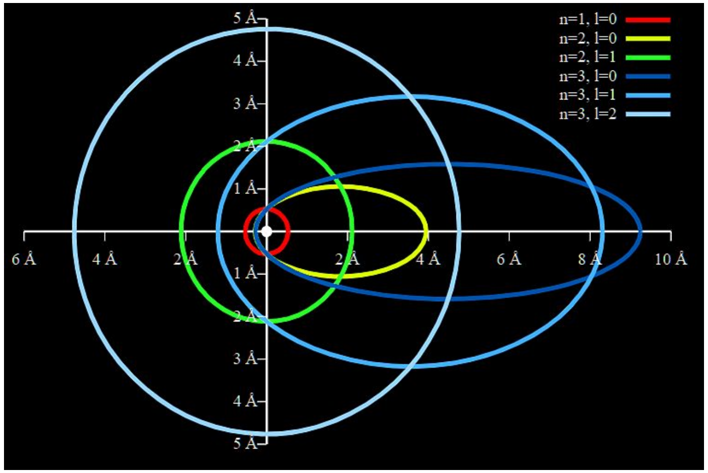
Puede generalizarse esta situación de indicadores sin dimensión, es decir: ¿Qué cantidades sin dimensión existen en la física de las cuales se puede obtener más información?

Un ejemplo prominente de esto es la constante de la estructura fina.

La constante de la estructura fina (1)

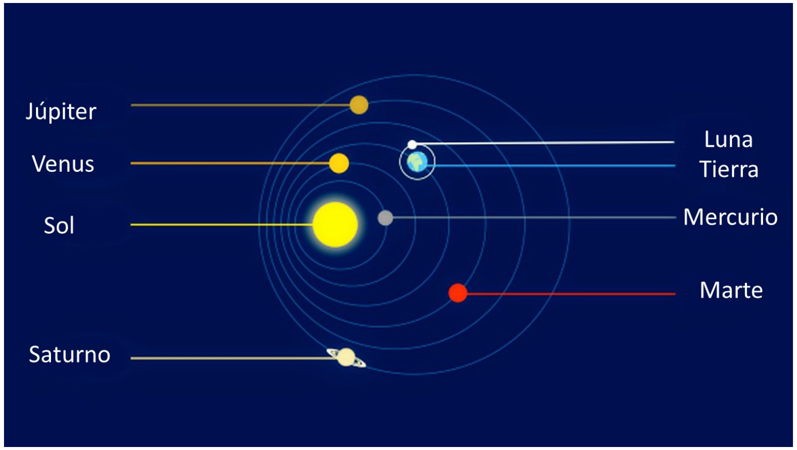
En lugar de un cociente de fuerzas, también se pueden formar ratios a partir de energías, velocidades u otras dimensiones. Un cociente de velocidades es la constante de estructura fina α. Como su nombre indica, se utiliza para explicar la estructura fina de los espectros atómicos.

En el desarrollo histórico del modelo atómico (Bohr), el movimiento de los electrones se postulaba como órbitas circulares alrededor del núcleo atómico. Debido a la estructura fina visible en las líneas espectrales emitidas por los átomos, la idea se perfeccionó sustituyendo las órbitas circulares de los electrones por órbitas elípticas (Sommerfeld). Según este modelo, el núcleo se sitúa en uno de los dos focos de una elipse orbital, lo que da lugar a una configuración geométrica similar a las órbitas planetarias según las leyes de Kepler.



La constante de la estructura fina (2)

En estas órbitas, se supone que el electrón se mueve de forma estable, al igual que en el modelo de Bohr, sin la radiación de ondas electromagnéticas que exige la teoría electromagnética clásica para este caso.



Este modelo es análogo al sistema planetario de Kepler en versión pequeña. La similitud es evidente porque los campos de fuerza de las cargas eléctricas del núcleo atómico y la gravitación del sol tienen la misma forma:

$$F \sim \frac{1}{r^2}$$

$F:$ fuerza

r: distancia

La constante de la estructura fina (3)

La definición de la constante α resulta de la relación de la velocidad calculada del electrón en el estado básico del átomo de hidrógeno y la velocidad de la luz. La velocidad del electrón se deduce del momento angular orbital, que en términos modernos consiste en múltiplos de $h/2\pi$ (h: constante de Planck).

$$\alpha = \frac{v_{e,n=1}}{c}$$

$v_{e,n=1}$: velocidad orbital del electrón en el estado básico del átomo de hidrógeno
c: velocidad de la luz

Para el momento angular orbital l del electrón se aplica lo siguiente:

$$l = m_e \cdot v_e \cdot r_a = n \cdot \frac{h}{2\pi} \qquad ; \qquad n = 1: \mathit{estado\ básico}$$

m_e: masa del electron
r_a : radio atómico de Bohr

La constante de la estructura fina (4)

$$v_e = \frac{h}{2\pi \cdot m_e \cdot r_a} \qquad (I)$$

El radio atómico de Bohr r_a resulta del equilibrio entre la fuerza de Coulomb y la fuerza centrífuga.

$$\frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{e^2}{r_a^2} = m_e \cdot \omega_e^2 \cdot r_a \quad ; \quad v = \omega \cdot r$$

$$\frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{e^2}{r_a} = m_e \cdot v_e^2$$

$$r_a = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{e^2}{m_e \cdot v_e^2} \qquad (II)$$

Sustituyendo (II) en (I):

$$v_e = \frac{e^2}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot h}$$

La constante de la estructura fina (5)

Así sigue la constante de estructura fina α:

$$\alpha = \frac{v_e}{c} = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 \cdot hc} = 0.007 = \frac{1}{137}$$

La disminución de energía de los niveles de energía en los átomos por el acoplamiento espín-órbita es proporcional α^2. Con términos adicionales, el valor numérico exacto se obtiene por:

$$\Delta E_{estructura\ fina} = -E_{Rydberg}\left(\frac{Z}{n}\right)^2 \cdot \frac{(Z \cdot \alpha)^2}{n}\left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4 \cdot n}\right)$$

$E_{Rydberg}$: energía de ionización del átomo de hidrógeno: 13.6 eV

Z : número de protones del núcleo atómico

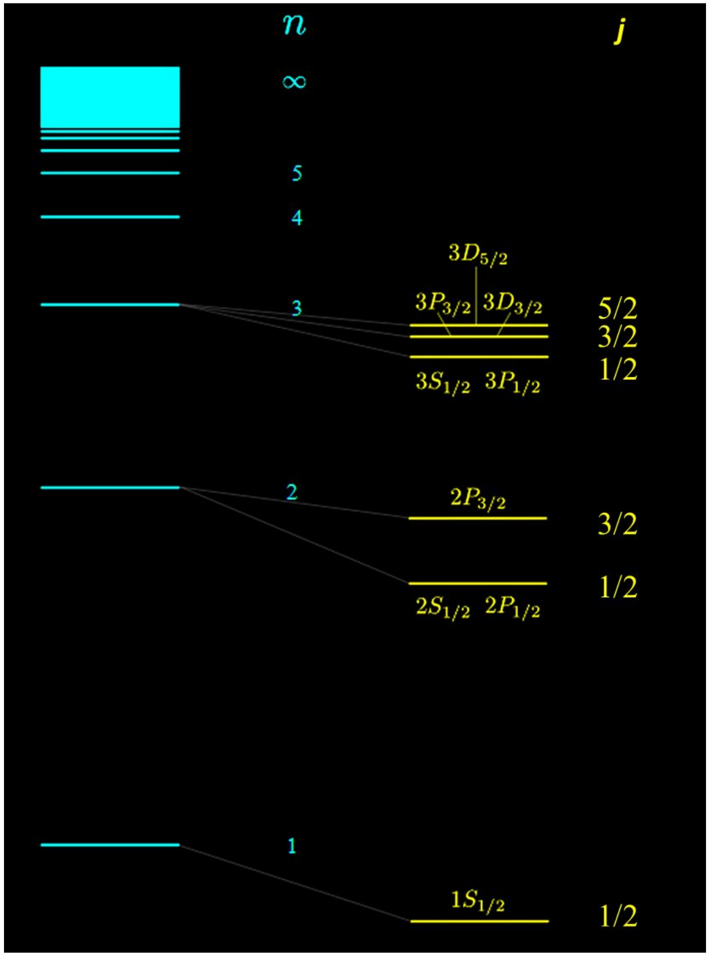
n : número cuántico principal

j : momento angular total ($j = 1/2\ \ si\ l = 0, los\ demás\ j = l \pm 1/2$)

La constante de la estructura fina (6)

Como la constante de estructura fina es sin dimensión, pero está compuesta por constantes fundamentales (e, h, c) no hay posibilidades para modificar los valores numéricos de los parámetros.

Sin embargo, la constante de estructura fina puede utilizarse para estimaciones versátiles de cantidades físicas. Con la ayuda del principio de incertidumbre, se obtiene un límite superior para el número de protones que componen un núcleo atómico.



Límite superior de los nucleótidos pesados

Equilibrio de fuerzas para un átomo con Z protones:

$$\frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \frac{Z \cdot e^2}{r^2} = m_e \cdot \frac{v_e^2}{r} \qquad \text{(I)}$$

El principio de incertidumbre para el momento p y la localización r se describe según:

$$p \cdot r \geq \frac{h}{2\pi} \qquad ; \qquad m \cdot v \cdot r \geq \frac{h}{2\pi} \qquad \text{(II)}$$

El lado derecho de (II) insertado en (I) :

$$\frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot Z \cdot e^2 \leq \frac{h}{2\pi} \cdot v_e$$

La mayor velocidad límite posible es la velocidad de la luz c:

$$Z_{max} \leq \frac{2\varepsilon_0 \cdot hc}{e^2} = \frac{1}{\alpha} = 137$$

Constantes sin dimensión y constantes físicas (1)

En la actualidad, es posible conseguir átomos pesados artificiales hasta el isótopo inestable del número atómico 118. Aunque se pudiera llegar más allá de este número atómico, cabe suponer que el valor recíproco de la constante de estructura fina representa un límite superior absoluto.

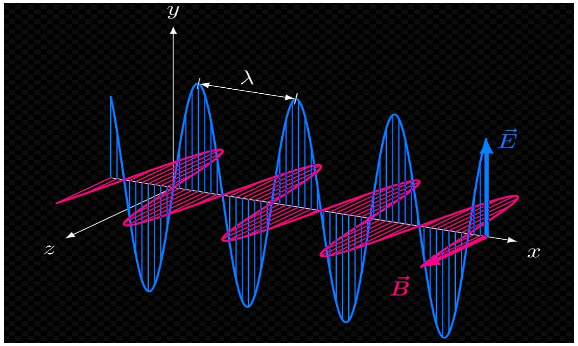
Los números físicos sin dimensión (como cocientes) tienen su justificación. Sin embargo, hay que examinar de forma muy crítica qué tipo de similitudes pueden describirse (por ejemplo, la ampliación o la reducción de la escala) y qué conclusiones físicas pueden extraerse.

Como se muestra en unos ejemplos, se puede obtener información adicional de las cantidades físicas sin dimensión. Si ésta se compone a su vez de constantes naturales, la cuestión puede ampliarse al significado, el origen y otras relaciones con éstas. Las constantes naturales suelen estar asociadas a ciertas dimensiones. Si es posible derivar una u otra constante natural a partir de otras magnitudes existentes, esto reduce y simplifica el número de constantes.

Constantes sin dimensión y constantes físicas (2)

El ejemplo más destacado fue el descubrimiento de la relación entre las constantes electromagnéticas y la velocidad de la luz c.

$$\varepsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$



Esto llevó a la tremenda conclusión de que la luz tenía que ser una onda electromagnética.

Albert Einstein no aceptaba que constantes naturales como la velocidad de la luz, la constante de gravitación o la constante de Planck fueran fundamentales en sí mismas. Sólo cuando el valor numérico de una constante de este tipo resulta convincentemente de las leyes físicas se revelan conexiones más profundas. El objetivo de Einstein era explicar y, en última instancia, eliminar todas las constantes naturales.